BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Г.Г.САЛМАНОВА
Бакинский Государственный Университет
nashi-nashi@rambler.ru

Для полиномиального операторного пучка в гильбертовом пространстве, когда некоторые из операторов, входящих в него, имеют независимые друг от друга порядки, доказывается теорема о кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов рассматриваемого пучка.

Исследования, касающиеся вопросов нахождения решений задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения

$$Lx(t)=\left(A_0+\frac{d}{dt}A_1+\ldots+\frac{d^n}{dt^n}A_n\right)x(t)=0 \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right|_{t=0}=x_k \quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

где $x(t)$- вектор-функция со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $A_i \quad (i=0,1,\ldots,n)$- линейные операторы, действующие в H, приводят к исследованию вопроса о кратной полноте системы собственных и присоединенных (с.п.) векторов операторного пучка

$$L(\lambda)=A_0+\lambda A_1+\ldots+\lambda^n A_n \qquad (2)$$

в пространстве H.

М.В.Келдыш в своей фундаментальной работе [1] дал определения с.п. векторов пучка (2), производных цепочек, построенных по с.п. векторам (2), кратной полноты с.п. векторов в гильбертовом пространстве.

Приведем ряд определений.

1. Число $\lambda=\lambda_0$ называют собственным значением $L(\lambda)$, а $x_0\neq\theta$ соответствующим собственным вектором, если $L(\lambda_0)x_0=x_0$.
2. Векторы $x_1,\ldots,x_k$ называются присоединенными векторами к собственному вектору x_0, соответствующему собственному значению λ_0, если выполнены соотношения

$$x_i = L(\lambda_0)x_i + \frac{\partial}{\partial\lambda}L(\lambda_0)x_{i-1} + \ldots + \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}L(\lambda_0)x_0, \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

Число $k+1$ называется длиной цепочки $x_0, x_1, \ldots, x_k$, которое может быть конечным, так и бесконечным.

3. Пусть $A \in \sigma_\infty$, тогда и $D = (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_\infty$. Если при некотором s ряд $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^s$ (где λ_j -собственные значения оператора D) сходится, то $\inf s = r$ есть порядок оператора A.

При условии, что A_n есть вполне непрерывный положительный оператор конечного порядка ρ, $KerA_n = \{\theta\}$, операторы A_i $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ вполне непрерывны и удовлетворяют условиям $A_i A_n^{-\frac{i}{n}}$ вполне непрерывны, Келдыш установил n-кратную полноту системы с.п. векторов (2).

В дальнейшем этот результат Келдыша был обобщен в различных направлениях многими учеными. Здесь можно отметить результаты Аллахвердиева Дж.Э., Лидского В.Б., Гасымова М.Г., Маркуса А.С., Радзиевского Г.В. и других.

Джабарзаде Р.М. в [2] рассмотрела квадратичный пучок

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 B_2 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2^2 \tag{3}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве, когда A_0, A_1 - вполне непрерывные операторы, B_1 и B_2 - вполне непрерывные самосопряженные операторы конечных порядков ρ_{B_1} и ρ_{B_2} (ρ_{B_1} и ρ_{B_2} не зависят друг от друга), $KerB_2 = \{\theta\}$. При этих условиях она доказала двухкратную полноту системы с.п. векторов оператора (3) в гильбертовом пространстве.

В настоящей статье этот результат из [2] будет обобщен на полиномиальные пучки более высокого порядка по λ.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

а) A_i - вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве H;

б) B_i - вполне непрерывные самосопряженные операторы конечных порядков ρ_i $(i = 1,2,\ldots,k+1)$, причем ρ_i не зависят друг от друга, $KerB_{k+1} = \{\theta\}$.

Тогда система с.п. векторов полиномиального пучка

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda^{2^{k-1}} A_1 B_{k+1} + \lambda^{2^k} B_{k+1}^2 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{2^{k-1}} B_k \tag{4}$$

2^k – кратна в пространстве H.

Доказательство проводим методом математической индукции. Пусть $k = 2$. Пучок (4) принимает вид:

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda^2 A_1 B_3 + \lambda^4 B_3^2 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2. \tag{5}$$

В (5) A_0, A_1 - вполне непрерывные операторы, B_i $(i=1,2,3)$ - вполне непрерывные самосопряженные операторы конечных порядков ρ_i $(i=1,2,3)$, соответственно, $KerB_3=\{\theta\}$.

Изучение пучка (5) мы сводим к изучению квадратичного пучка

$$\widetilde{L}(\lambda)=\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}_1+\lambda^2\widetilde{B}_2 \tag{6}$$

в прямой сумме H^2 двух копий сепарабельного гильбертова пространства H.

$\widetilde{E}\sim\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$-тождественный оператор пространства H^2.

Операторы $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{B}_1$ и $\widetilde{B}_2$ задаются с помощью операторных матриц

$$\widetilde{A}\sim\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}_1\sim\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{B}_2\sim\begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\widetilde{A}$ - вполне непрерывный оператор в H^2, так как A_0 и A_1 - вполне непрерывные операторы в H, $\widetilde{B}_1$ - самосопряженный вполне непрерывный оператор в H^2, так как B_1 есть вполне непрерывный самосопряженный оператор в H, $\widetilde{B}_2$ есть вполне непрерывный самосопряженный оператор конечного порядка ρ в H^2, т.к. B_2 и B_3 являются самосопряженными вполне непрерывными операторами конечных порядков в H. Из условия $KerB_3=\{\theta\}$ следует, что $Ker\widetilde{B}_2=\{\theta\}$.

Таким образом, условия на операторы A_i, B_i обеспечивают выполнение условий теоремы из [2], и, следовательно, имеет место 2-ух кратная полнота системы с.п. векторов пучка (6) в H^2.

Производные цепочки в [2] построены так же, как и в [1], а именно, если $x_0,x_1,\ldots,x_p$ цепочка с.п. векторов (5), отвечающая собственному значению λ_0, то соответствующий x_k $(0,1,\ldots,p)$ вектор в r-той производной системе определяется по правилу

$$x_{rk}=\frac{d^r}{dt^r}\left\{e^{\lambda_0 t}\left[\frac{t^k}{k!}x_0+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1+\ldots+x_k\right]\right\}\Bigg|_{t=0}, \qquad r=1,2,\ldots.$$

Остается показать, что 1-ые координаты с.п. векторов пучка (6) являются с.п. векторами пучка (5), соответственно, а 2-ые координаты являются соответствующими элементами из производной цепочки.

Пусть (x_0,x_{01}) - собственный вектор оператора $L(\lambda)$ из (6) с собственным значением λ. Тогда

$$x_0-A_0x_0-A_1x_1-\lambda B_1x_0-\lambda^2B_2x_0-\lambda^2B_3x_{01}=0\ , \tag{7}$$

$$x_{01} - \lambda^2 B_3 x_0 = 0 \quad . \tag{8}$$

Подставляя значение x_{01} из (8) в (7), имеем

$$x_0 = \left(A_0 + \lambda^2 A_1 B_3 + \lambda^4 B_3^2 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2\right) x_0 , \tag{9}$$

т.е.1-ая координата собственного вектора (6) является собственным вектором (5) с одним и тем же собственным значением λ.

Пусть теперь (x_1, x_{11}) – 1-ый присоединенный вектор к собственному вектору (x_0, x_{01}) пучка (6), тогда

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_{11} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_{11} \end{pmatrix} - \lambda^2\begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_{11} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} - 2\lambda\begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} = 0$$

или

$$x_1 = A_0 x_1 + A_1 x_{11} + \lambda B_1 x_1 + \lambda^2 B_2 x_1 + \lambda^2 B_3 x_{11} + B_1 x_0 + 2\lambda B x_0 + 2\lambda B_3 x_{01} = 0 \tag{10}$$

$$x_{11} = \lambda^2 B_3 x_1 + 2\lambda B_3 x_0 \, . \tag{11}$$

Подставляя выражения x_{11} и x_{01} из (9) и (11) в (10), имеем

$$x_1 = A_0 x_1 + \lambda^2 A_1 B_3 x_1 + \lambda^4 B_3^2 x_1 + \lambda B_1 x_1 + \lambda^2 B_2 x_1 +$$
$$+ 2\lambda A_1 B_3 x_0 + 4\lambda^3 B_3^2 x_0 + B_1 x_0 + 2\lambda B_2 x_0$$

или

$$x_1 = L(\lambda) x_1 + \frac{\partial}{\partial\lambda} L(\lambda) x_0 ,$$

т.е. x_1 есть первый присоединенный вектор пучка $L(\lambda)$ из (6) к его собственному вектору x_0, отвечающему собственному значению λ.

Пусть $(x_k, x_{k,1})$ есть k– тый присоединенный к собственному вектору (x_0, x_{01}) пучка (6), т.е.

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i1} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i1} \end{pmatrix} - \lambda^2\begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i1} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_{i-1,1} \end{pmatrix} - 2\lambda\begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_{i-1,0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i-2} \\ x_{i-2,1} \end{pmatrix} = 0 , \tag{12}$$

где x_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ есть i –тый присоединенный вектор к собственному вектору x_0 пучка (5) и выполнено также (12) при $i = k+1$.

Покажем, что x_{k+1} также есть $(k+1)$–ый присоединенный вектор к собственному вектору x_0 пучка (5), соответствующий его собственному значению λ.

Действительно из (12) при $i=k+1$, имеем

$$x_{k+1}-A_0x_{k+1}-A_1x_{k+1,1}-\lambda B_1x_{k+1}-\lambda^2B_2x_{k+1}-\lambda^2B_3x_{k+1,1}-B_1x_k-$$
$$-2\lambda B_2x_k-2\lambda B_3x_k-B_3x_{k-1,1}=0\ , \tag{13}$$

$$x_{k+1,1}=\lambda^2B_3x_{k+1}+2\lambda B_3x_k+B_3x_{k-1}\ . \tag{14}$$

При $i=k$ из (12) мы имеем

$$x_{k,1}=\lambda^2B_3x_k+2\lambda B_3x_{k-1}+B_3x_{k-2}\,, \tag{15}$$

а при $i=k-1$ из (12) имеем

$$x_{k-1,1}=\lambda^2B_3x_{k-1}+2\lambda B_3x_{k-2}+B_3x_{k-3}\,. \tag{16}$$

Подставляя значения $x_{k+1,1}$ из (14), $x_{k,1}$ из (15), $x_{k-1,1}$ из (16) в (13), получаем:

$$x_{k+1}=A_0x_{k+1}+\lambda^2A_1B_3x_{k+1}+2\lambda A_1B_3x_k+A_1B_3x_{k-1}+\lambda B_1x_{k+1}+\lambda^2B_2x_{k+1}+$$
$$+\lambda^4B_3^2x_{k+1}+2\lambda^3B_3^2x_k+\lambda^2B_3^2x_{k-1}+B_1x_k+2\lambda B_2x_k+2\lambda^3B_3^2x_k+$$
$$+4\lambda^2B_3^2x_{k-1}+2\lambda B_3^2x_{k-2}+B_2x_{k-1}+\lambda^2B_3^2x_{k-1}+2\lambda B_3^2x_{k-2}+B_3^2x_{k-3}=$$
$$=\left(A_0+\lambda^2A_1B_3+\lambda B_1+\lambda^2B_2+\lambda^4B_3^2\right)x_{k+1}+\left(2\lambda A_1B_3+4\lambda^3B_3^2+B_1+2\lambda B_2\right)x_k$$
$$+\left(A_1B_3+6\lambda^2B_3^2+B_2\right)x_{k-1}+2\lambda B_3^2x_{k-2}+B_3^2x_{k-3}\,,$$

т.е.

$$x_{k+1}=L(\lambda)x_{k+1}+\frac{\partial L(\lambda)}{\partial\lambda}x_k+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2L(\lambda)}{\partial\lambda^2}x_{k-1}+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3L(\lambda)}{\partial\lambda^3}x_{k-2}+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4L(\lambda)}{\partial\lambda^4}x_{k-3}\,,$$

и вместе с (12) последнее доказывает, что x_{k+1} является $k+1$–ым присоединенным к собственному вектору x_0.

Таким образом, методом математической индукции доказывается, что с.п. вектора пучка $\widetilde{L}(\lambda)$ являются с.п. векторами пучка (5). Вторые координаты с.п. векторов пучка (6), удовлетворяют условиям

$$x_{i,1}=\lambda^2B_3x_i+2\lambda B_3x_{i-1}+B_3x_{i-2}\,,\quad i=1,2,\dots,k+1\,,$$

где $x_1,\dots,x_{k+1}$ - система присоединенных векторов к собственному вектору x_0 пучка (5), соответствующему его собственному значению λ.

Аналогичными рассуждениями показываем, что если 1-ая координата k-того присоединенного вектора к собственному вектору (x_0,x_{01}) полиномиального пучка (6) есть k-тый присоединенный вектор к собственному вектору x_0 пучка (5), то это будет иметь место и для $(k+1)$-го присоединенного вектора.

Таким образом, имеем 4-х кратную полноту системы с.п. векторов пучка (5).

Пусть теперь выполнены условия теоремы при $n=2^{s+1}$.

Предположим справедливость утверждения теоремы при $n = 2^s$. В пространстве H^2 рассмотрим операторный пучок

$$\widetilde{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda^2\begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\ldots-$$

$$-\lambda^{2^{s-1}}\begin{pmatrix} B_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda^{2^s}\begin{pmatrix} B_s & B_{s+1} \\ B_{s+1} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Для такого пучка при выполнении условий теоремы мы предположили 2^s кратную полноту системы с.п. векторов в H^2. Дальнейшее доказательство аналогично тому, что проведено при $n = 4$.

Таким образом, система всех 1-ых координат с.п. векторов пучка (17) совпадает с системой с.п. векторов операторного пучка

$$A_0 + \lambda^{2^s} A_1 B_{s+1} + \lambda^{2^{s+1}} B_{s+1}^2 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{2^s} B_s \qquad (18)$$

и 2^s кратная полнота пучка (17) в H^2 обеспечивает 2^{s+1} – кратную полноту с.п. векторов (18) в H, что и требовалось доказать

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН, 1971, т.27, в.4, с.15-47.
2. Джабарзаде Р.М. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, квадратично зависящих от спектрального параметра // Изв. АН Азерб. ССР, 1977, №1, с.41-45.

POLİNOMİAL OPERATOR-DƏSTƏLƏRİN SPEKTRAL MƏSƏLƏLƏRİ

G.H.SALMANOVA

XÜLASƏ

İşdə Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma olmayan polinomial operator dəstəsinə baxılır. Bu dəstəyə daxil olan operatorların bəziləri baş operatora tabe deyil. Dəstənin xüsusi və qoşma elementlərinin çoxqat tamlığı isbat olunur.

SPECTRAL PROBLEMS FOR THE POLYNOMIAL OPERATOR-PENCILS

G.H.SALMANOVA

SUMMARY

The article studies the polynomial operator-pencil in the Hilbert space. Some operators entering the pencil don’t depend on selfadjoint general operator. The theorem of the multiple completeness of eigen and associated elements of the operator-pencil is proved.